# 時間遅れの方程式を用いたロタウイルス感染症の数理モデルに関する研究

お茶の水女子大学大学院　人間文化創成科学研究科　理学専攻数学コース
鷹島愛里菜 (Erina TAKASHIMA) *

**概要**

SIR モデルは、感染症の流行過程を説明する数理モデルとして広く知られている。本研究では、ワクチン接種人口を考慮した SVIR モデルを対象とする。モデルに時間遅れの項を導入することで、ウイルスに感染してから発症するまでの潜伏期間を反映した数理モデルを構築できる。本講演では、このモデルにおける平衡点の存在とその安定性について得られた結果を紹介する。

## 1　導入

本講演は, 久保隆徹先生（お茶の水女子大学）との共同研究に基づく.
時間遅れの方程式を用いたロタウイルスに対する免疫を考慮して作成した数理モデルについて数学的な解析を行う. 考察したい対象の人口集団を 4 つの状態に分割し, 次のように定める.

- $S = S(t)$：時刻 $t$ における感受性人口
- $V = V(t)$：時刻 $t$ におけるワクチン接種によりロタウイルス感染症に対する免疫をもった人口
- $I = I(t)$：時刻 $t$ における感染性人口
- $R = R(t)$：時刻 $t$ における回復人口

参考文献 [2] によれば, ロタウイルス感染症の時間遅れのない数理モデルは, 以下のような微分方程式モデルで記述できる.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = (1-\rho)b - \beta(I)SI - (\nu+\mu)S \\ \dfrac{dV}{dt} = \rho b + \nu S - \varepsilon\beta(I)VI - \mu V \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta(I)SI + \varepsilon\beta(I)VI - (\mu_\kappa + \kappa + \mu)I \\ \dfrac{dR}{dt} = \kappa I - \mu R \end{cases} \tag{1.1}$$

ただし, $b$: 出生率, $\rho$: 各個体が出生時に免疫をもって生まれてくる確率, $\nu$: ワクチン接種率, $\beta(I)$: 接触率, $\mu$: 死亡率, $\kappa$: 回復率, $\mu_\kappa$: ロタウイルスによる死亡率, $\varepsilon$：ワクチン接種により感染が軽減される割合をそれぞれ表し, すべて正の定数である. ただし，$0 \le \rho, \varepsilon \le 1$ である.

* E-mail:g2440609@edu.cc.ocha.ac.jp

しかし (1.1) では, ウイルスに感染してから発症するまでの潜伏期間を考えていないため, 現実の現象を記述しているとは考えにくい. そこで, 本論文では, ウイルスに感染してから発症するまでの潜伏期間 $\tau$ を考慮する. (1.1) の $I$ の項に時間遅れを入れて, $I(t-\tau)$ として考える. ただし, 簡単のためメディアによる効果は考えない. すなわち,

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = (1-\rho)b - \beta_0 SI(t-\tau) - (\nu+\mu)S \\ \dfrac{dV}{dt} = \rho b + \nu S - \varepsilon\beta_0 VI(t-\tau) - \mu V \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta_0 SI(t-\tau) + \varepsilon\beta_0 VI(t-\tau) - \alpha I \\ \dfrac{dR}{dt} = \kappa I - \mu R \end{cases} \tag{1.2}$$

を考える. ただし, $\mu_\kappa + \kappa + \mu = \alpha$ とおいた.

## 2 主定理

本講演では, 主定理として, ロタウイルスが蔓延しない場合と蔓延する場合, それぞれの平衡点の存在と, その安定性を明らかにしたことを紹介する.

**定理 2.1.** ロタウイルス感染症が蔓延しない平衡点 $E^* = \left(\dfrac{(1-\rho)b}{\nu+\mu}, \dfrac{b(\rho\mu+\nu)}{\mu(\nu+\mu)}, 0, 0\right)$ の漸近安定性について, 次が成り立つ.

(1) $\alpha > \dfrac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon)+\varepsilon(\mu+\nu)\}}{\mu(\nu+\mu)}$ のとき, 平衡点 $E^*$ は 漸近安定である.

(2) $\alpha < \dfrac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon)+\varepsilon(\mu+\nu)\}}{\mu(\nu+\mu)}$ のとき, 平衡点 $E^*$ は 不安定である.

**注意 2.2.** [2] でも, ロタウイルス感染症が蔓延しない平衡点 $E^* = \left(\dfrac{(1-\rho)b}{\nu+\mu}, \dfrac{b(\rho\mu+\nu)}{\mu(\nu+\mu)}, 0, 0\right)$ は, 同じ条件で漸近安定性・不安定性が示されている.

**定理 2.3.** ロタウイルス感染症が蔓延する平衡点 $E^* = (S_+^*, V_+^*, I_+^*, R_+^*)$, $(S_-^*, V_-^*, I_-^*, R_-^*)$ の漸近安定性について, 次が成り立つ. ただし,

$$\begin{aligned} S_+^* &= \frac{(1-\rho)b}{\nu+\mu+\beta_0 I_+}, \quad V_+^* = \frac{b(\nu+\rho\mu+\rho\beta_0 I_+)}{(\nu+\mu+\beta_0 I_+)}, \quad I_+^* = I_+, \quad R_+^* = \frac{\kappa I_+}{\mu}, \\ S_-^* &= \frac{(1-\rho)b}{\nu+\mu+\beta_0 I_-}, \quad V_-^* = \frac{b(\nu+\rho\mu+\rho\beta_0 I_-)}{(\nu+\mu+\beta_0 I_-)}, \quad I_-^* = I_-, \quad R_-^* = \frac{\kappa I_-}{\mu} \end{aligned}$$

である.

(1) $\tau = 0$ のとき, 平衡点 $E^*$ は漸近安定である.

(2) $\tau > 0$ のとき, $P_2^2 - P_1P_3 + 2Q_1Q_3 - Q_2^2 > 0$ であれば, 平衡点 $E^*$ は漸近安定である. ただし,

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (\mu + \nu + \beta_0 I^*) + (\mu + \varepsilon\beta_0 I^*) + \alpha,\\
P_2 &= \alpha(\mu + \varepsilon\beta_0 I^*) + (\mu + \nu + \beta_0 I^*)(\mu + \varepsilon\beta_0 I^*) + (\mu + \nu + \beta_0 I^*)\alpha,\\
P_3 &= (\mu + \nu + \beta_0 I^*)\alpha(\mu + \varepsilon\beta_0 I^*),\\
Q_1 &= -\alpha,\\
Q_2 &= -\mu\alpha - (\mu + \nu + \beta_0 I^*)\alpha + (1-\varepsilon)\beta_0^2 S^* I^*,\\
Q_3 &= -(\mu + \nu + \beta_0 I^*)\mu\alpha + \mu(1-\varepsilon)\beta_0^2 S^* I^*
\end{aligned}
$$

である.

# 3 主定理の証明の概略

(1.2) の平衡点 $E^* = (S^*, V^*, I^*, R^*)$ を，定義に従って求めることから始める．$I^* = 0$ の場合はロタウイルス感染症が蔓延しない平衡点であり，$I^* \neq 0$ の場合が蔓延する平衡点となる．

次に，その平衡点まわりでのヤコビ行列を考え，その行列の固有値を考察する．はじめに $\tau = 0$ の場合から考察をはじめ，すべての固有値が実部が負であれば漸近安定であり，１つでも実部が正の固有値があれば不安定となる．$\tau > 0$ の場合は，$\tau = \tau_*$ で固有値 $\lambda$ が虚軸上にくる，すなわち $\tau = \tau_*$ のとき $\lambda = i\omega$（$\omega > 0$）となると仮定して，このような $\omega > 0$ が存在するかどうかを議論する．定理の主張である平衡点の漸近安定性を示すために，このような正の解 $\omega$ が存在しない条件を考察する．

## 3.1 平衡点

(1.2) の解が時間とともにどこへ収束するかを調べるため，(1.2) の平衡点 $(S^*, V^*, I^*, R^*)$ を求める。平衡点は時間によらないため，次を満たす。

$$
\begin{cases}
(1-\rho)b - \beta_0 S^* I^* - (\nu + \mu)S^* = 0 & \text{(3.1a)}\\
\rho b + \nu S^* - \varepsilon\beta_0 V^* I^* - \mu V^* = 0 & \text{(3.1b)}\\
\beta_0 S^* I^* + \varepsilon\beta_0 V^* I^* - \alpha I^* = 0 & \text{(3.1c)}\\
\kappa I^* - \mu R^* = 0 & \text{(3.1d)}
\end{cases}
$$

が成り立つ.

(3.1c) より

$$I^*(\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^* - \alpha) = 0$$

となる. よって, $I^* = 0$ または $\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^* - \alpha = 0$ が成立する.

(i) $I^* = 0$ のとき

(3.1a), (3.1b), (3.1d) より, $I^* = 0$ のときの平衡点 $E^*$ は

$$E^* = (S^*, V^*, I^*, R^*) = \left(\frac{(1-\rho)b}{\nu + \mu}, \frac{b(\rho\mu + \nu)}{\mu(\nu + \mu)}, 0, 0\right) \tag{3.2}$$

となる.

(ii) $\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^* - \alpha = 0$ のとき

(3.1d) より

$$R^* = \frac{\kappa I^*}{\mu} \tag{3.3}$$

が得られる. また (3.1a) より

$$S^* = \frac{(1-\rho)b}{\nu + \mu + \beta_0 I^*} \tag{3.4}$$

が得られる. また, (3.1b) より

$$V^* = \frac{b(\nu + \rho\mu + \rho\beta_0 I^*)}{(\nu + \mu + \beta_0 I^*)(\varepsilon\beta_0 I^* + \mu)} \tag{3.5}$$

が得られる. 次に

$$\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^* - \alpha = 0$$

に (3.4), (3.5) を代入し整理すると

$$\alpha\varepsilon{\beta_0}^2 {I^*}^2 + \beta_0\left[\alpha\{\mu + \varepsilon(\nu+\mu)\} - b\varepsilon\beta_0\right] I^* \ + \alpha(\nu+\mu)\mu - \beta_0 b\{(1-\rho)\mu + \varepsilon(\nu + \rho\mu)\} = 0 \tag{3.6}$$

が得られる. ここで

$$p := \alpha\varepsilon{\beta_0}^2 \tag{3.7}$$
$$q := \beta_0\left[\alpha\{\mu + \varepsilon(\nu+\mu)\} - b\varepsilon\beta_0\right] \tag{3.8}$$
$$r := \alpha(\nu+\mu)\mu - \beta_0 b\{(1-\rho)\mu + \varepsilon(\nu+\rho\mu)\} \tag{3.9}$$

とおく. $I^*$ は感染性人口を表し, 非負であるから, 次の 2 つの場合に分けて (3.6) を解き, $I^*$ を求めていく.

(a) 2 つの解が共に正の値になる
(b) 2 つの解のうち 1 つの解が正の値, もう一方の解が負の値になる

(3.6) の左辺を $f(I^*)$ とおき, 二次方程式 $f(I^*)$=0 の判別式を $D$ とする.

(a) の場合

① 判別式 $D > 0$ ② 二次関数 $f(I^*)$ の軸 $> 0$ ③ $f(0) > 0$

の 3 つの条件について考えればよい. ②について

$$b\varepsilon\beta_0 > \alpha\{\mu+\varepsilon(\nu+\mu)\}\cdots ②'$$

が得られる. また, ③について $f(0) > 0$ になるための条件として

$$\alpha(\nu+\mu)\mu > \beta_0 b\{(1-\rho)\mu+\varepsilon(\nu+\rho\mu)\}\cdots ③'$$

が得られる. また, ①について判別式 $D > 0$ となるための十分条件として

$$-b\varepsilon\beta_0 + 4\alpha\{(1-\rho)\mu+\varepsilon(\nu+\rho\mu)\} > 0\cdots ①'$$

が得られる. よって, ①'〜③' が (a) を満たすための必要十分条件である. これらの条件のもと, 次の 2 つの正の解が得られる.

$$I^* = \frac{-[\alpha\{\mu+\varepsilon(\nu+\mu)\}-b\varepsilon\beta_0] \pm \sqrt{[\alpha\{\mu+\varepsilon(\nu+\mu)\}-b\varepsilon\beta_0]^2 - 4\alpha\varepsilon[\alpha(\nu+\mu)\mu-\beta_0 b\{(1-\rho)\mu+\varepsilon(\nu+\rho\mu)\}]}}{2\alpha\varepsilon\beta_0}$$

ここで, 正の解 $I_+, I_-$ を

$$I_+ = \frac{-[\alpha\{\mu+\varepsilon(\nu+\mu)\}-b\varepsilon\beta_0] + \sqrt{[\alpha\{\mu+\varepsilon(\nu+\mu)\}-b\varepsilon\beta_0]^2 - 4\alpha\varepsilon[\alpha(\nu+\mu)\mu-\beta_0 b\{(1-\rho)\mu+\varepsilon(\nu+\rho\mu)\}]}}{2\alpha\varepsilon\beta_0}$$

$$I_- = \frac{-[\alpha\{\mu+\varepsilon(\nu+\mu)\}-b\varepsilon\beta_0] - \sqrt{[\alpha\{\mu+\varepsilon(\nu+\mu)\}-b\varepsilon\beta_0]^2 - 4\alpha\varepsilon[\alpha(\nu+\mu)\mu-\beta_0 b\{(1-\rho)\mu+\varepsilon(\nu+\rho\mu)\}]}}{2\alpha\varepsilon\beta_0}$$

と定める. よって (3.3), (3.4), (3.5) より, (a) の場合 $\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^* - \alpha = 0$ のときの平衡点 $E^*$ は

$$E^* = (S_+^*, V_+^*, I_+^*, R_+^*),\ (S_-^*, V_-^*, I_-^*, R_-^*) \tag{3.10}$$

となることがわかる. ここで

$$S_+^* = \frac{(1-\rho)b}{\nu+\mu+\beta_0 I_+},\quad V_+^* = \frac{b(\nu+\rho\mu+\rho\beta_0 I_+)}{(\nu+\mu+\beta_0 I_+)},\quad I_+^* = I_+,\quad R_+^* = \frac{\kappa I_+}{\mu},$$
$$S_-^* = \frac{(1-\rho)b}{\nu+\mu+\beta_0 I_-},\quad V_-^* = \frac{b(\nu+\rho\mu+\rho\beta_0 I_-)}{(\nu+\mu+\beta_0 I_-)},\quad I_-^* = I_-,\quad R_-^* = \frac{\kappa I_-}{\mu}$$

である.

(b) の場合

$$\boxed{④\ f(0) < 0}$$

の条件について考えればよい. ④について

$$\alpha(\nu+\mu)\mu - \beta_0 b\{(1-\rho)\mu+\varepsilon(\nu+\rho\mu)\} < 0\cdots ④'$$

が得られる. ④' の仮定のもと, 正の解 $I_+$ が得られる. よって (3.3), (3.4), (3.5) より, (b) の場合 $\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^* - \alpha = 0$ のときの平衡点 $E^*$ は

$$E^* = (S_+^*, V_+^*, I_+^*, R_+^*) \tag{3.11}$$

となることがわかる. ここで

$$S_+^* = \frac{(1-\rho)b}{\nu+\mu+\beta_0 I_+}, \quad V_+^* = \frac{b(\nu+\rho\mu+\rho\beta_0 I_+)}{(\nu+\mu+\beta_0 I_+)}, \quad I_+^* = I_+, \quad R_+^* = \frac{\kappa I_+}{\mu},$$

である.

## 3.2　平衡点の安定性

次に, 各平衡点 $E^* = (S^*, V^*, I^*, R^*)$ の安定性を調べる. (1.2) のヤコビ行列を求め, (1.2) を線形化すると以下のようになる.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \{-\beta_0 I^* - (\nu+\mu)\}S - \beta_0 S^* I(t-\tau) \\ \dfrac{dV}{dt} = \nu S + (-\varepsilon\beta_0 I^* - \mu)V - \varepsilon\beta_0 V^* I(t-\tau) \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta_0 I^* S + \varepsilon\beta_0 I^* V - \alpha I + (\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^*)I(t-\tau) \\ \dfrac{dR}{dt} = \kappa I - \mu R \end{cases} \tag{3.12}$$

この方程式を満たす

$$\begin{pmatrix} S \\ V \\ I \\ R \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} S_0 \\ V_0 \\ I_0 \\ R_0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

が存在するとする. ここで, $\begin{pmatrix} S_0 \\ V_0 \\ I_0 \\ R_0 \end{pmatrix} \neq 0$ であり, $S_0 = S(0), V_0 = V(0), I_0 = I(0), R_0 = R(0)$ としている. (3.13) より, (3.12) を整理すると

$$\begin{vmatrix} \lambda+\beta_0 I^*+\nu+\mu & 0 & \beta_0 S^* e^{-\lambda\tau} & 0 \\ -\nu & \lambda+\varepsilon\beta_0 I^*+\mu & \varepsilon\beta_0 V^* e^{-\lambda\tau} & 0 \\ -\beta_0 I^* & -\varepsilon\beta_0 I^* & \lambda+\alpha-(\beta_0 S^*+\varepsilon\beta_0 V^*)e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & \lambda+\mu \end{vmatrix} = 0 \tag{3.14}$$

が得られる.

### 3.2.1　$I^* = 0$ のときの平衡点 $E^*$ の漸近安定性

以下, 定理 2.1 の証明を行う.

(3.2) の平衡点 $E^*$ において (3.14) を整理すると (1.2) の特性方程式は以下のように与えられる.

$$(\lambda+\nu+\mu)(\lambda+\mu)^2\{\lambda+\alpha-(\beta_0 S^*+\varepsilon\beta_0 V^*)e^{-\lambda\tau}\} = 0 \tag{3.15}$$

したがって

$$\lambda_1 = -\nu - \mu \tag{3.16}$$
$$\lambda_2 = -\mu \tag{3.17}$$
$$\lambda_3 = -\alpha + (\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^*)e^{-\lambda\tau} \tag{3.18}$$

が得られる. ここで, $\lambda_1, \lambda_2$ はともに負であるので, 平衡点の安定性は $\lambda_3$ の正負に依存する. そのため, $-\alpha + (\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^*)e^{-\lambda\tau}$ の正負を判定する. (3.2) より

$$\lambda_3 = -\alpha + \frac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon) + \varepsilon(\mu+\nu)\}}{\mu(\nu+\mu)}e^{-\lambda\tau} \tag{3.19}$$

が得られる.

<u>$\tau = 0$ のとき</u>

(3.19) より

$$\alpha > \frac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon) + \varepsilon(\mu+\nu)\}}{\mu(\nu+\mu)} \quad \text{を仮定すると} \quad \lambda_3 < 0,$$
$$\alpha < \frac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon) + \varepsilon(\mu+\nu)\}}{\mu(\nu+\mu)} \quad \text{を仮定すると} \quad \lambda_3 > 0$$

が成り立つ.

<u>$\tau > 0$ のとき</u>

(3.19) より

$$\lambda_3 + \alpha - \frac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon) + \varepsilon(\mu+\nu)\}}{\mu(\nu+\mu)}e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{3.20}$$

が成り立つ. ここで, $\tau = \tau_1 > 0$ に対して $\lambda = i\omega(\omega > 0)$ で虚軸と交わるとし, オイラーの公式を利用する. 実部と虚部を分離すると

$$\begin{cases} \cos\omega\tau = \dfrac{\alpha\mu(\nu+\mu)}{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon) + \varepsilon(\mu+\nu)\}} & \text{(3.21a)} \\ \sin\omega\tau = -\dfrac{\omega\mu(\nu+\mu)}{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon) + \varepsilon(\mu+\nu)\}} & \text{(3.21b)} \end{cases}$$

が得られる.

$\lambda_3 < 0$ のとき, (3.21a) において $\alpha > \dfrac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon) + \varepsilon(\mu+\nu)\}}{\mu(\nu+\mu)}$ の仮定より $\cos\omega\tau > 1$ となってしまう. よって, このとき $\lambda = i\omega$ は存在しないことが分かる. したがって, (1.2) において (3.2) の平衡点 $E^*$ は $\lambda_3 < 0$ のとき, $\tau \geq 0$ でつねに漸近安定である.

一方, $\lambda_3 > 0$ のとき, (3.21a), (3.21b) において $\cos^2\omega\tau + \sin^2\omega\tau = 1$ を用いて整理すると

$$\omega^2 = \frac{{\beta_0}^2 b^2\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon) + \varepsilon(\mu+\nu)\}^2 - \alpha^2\mu^2(\nu+\mu)^2}{\mu^2(\nu+\mu)^2} \tag{3.22}$$

となる．$\alpha < \dfrac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon)+\varepsilon(\mu+\nu)\}}{\mu(\nu+\mu)}$ の仮定より, 正の実数解をもつことが分かる. その値を $\omega=\omega_1$ とすると次のようになる.

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{{\beta_0}^2 b^2\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon)+\varepsilon(\mu+\nu)\}^2-\alpha^2\mu^2(\nu+\mu)^2}}{\mu(\nu+\mu)} \tag{3.23}$$

また, (3.21a),(3.23) より

$$\tau_1 = \frac{\mu(\nu+\mu)}{\sqrt{{\beta_0}^2 b^2\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon)+\varepsilon(\mu+\nu)\}^2-\alpha^2\mu^2(\nu+\mu)^2}} \arccos \frac{\alpha\mu(\nu+\mu)}{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon)+\varepsilon(\mu+\nu)\}} \tag{3.24}$$

が得られる. よって, (3.24) の $\tau_1$ に対して, $\lambda = i\omega_1$ で虚軸と交わることが分かる.

次に, $\lambda$ が虚軸を通過するかどうかを調べる．$Re(\frac{d}{d\tau}\lambda_3)$ の正負を判定する．(3.19) の両辺を $\tau$ で微分し, 整理すると

$$Re\left(\frac{d}{d\tau}\lambda_3\right)^{-1}\Bigg|_{\tau=\tau_1} = Re\left\{\frac{\omega_1^2+i\omega_1\alpha}{\omega_1^4+\omega_1^2\alpha^2}+\frac{\tau i}{\omega_1}\right\} = \frac{1}{\omega_1^2+\alpha^2}$$

が得られる．$Re\left(\dfrac{d}{d\tau}\lambda_3\right)^{-1}\Bigg|_{\tau=\tau_1} > 0$ であるため, $\lambda_3$ は虚軸を通過することが分かる. よって, $\lambda_3$ は左半平面から右半平面に移動をしていることになる. しかし, $\lambda_3 > 0$ であるため, この動きには矛盾が生じる.

実際，$\tau=0$ のときは $\lambda_3$ は正の実数であり，$\tau>0$ に対して，$\lambda_3$ が満たす関係式は

$$\lambda_3 + \alpha - (\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^*)e^{-\lambda_3\tau} = 0 \tag{3.25}$$

である．$\lambda_3$ が $\tau$ の関数であるので, $\tau$ で微分することで $\tau>0$ で $\lambda_3$ は実数の値を取りながら減少していくことがわかる．ただし,

$$\alpha < \frac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon)+\varepsilon(\mu+\nu)\}}{\nu(\nu+\mu)} = \beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^*$$

のとき，(3.25) は $\lambda_3=0$ を解にもたないことがわかるので，$\lambda_3$ は $\tau\to\infty$ である正の値に収束することがわかる．よって，$\tau>0$ においては，つねに $\lambda_3$ は正の実数の値をとることがわかる．以上から，$\alpha < \dfrac{\beta_0 b\{\mu(1-\rho)(1-\varepsilon)+\varepsilon(\mu+\nu)\}}{\nu(\nu+\mu)}$ のときは，(3.2) で与えられる平衡点 $E^*$ は $\tau \geq 0$ でつねに不安定であることがわかる．以上から, 定理 2.1 の主張が得られた.

#### 3.2.2 $\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^* - \alpha = 0$ のときの平衡点 $E^*$ の漸近安定性

以下, 定理 2.3 の証明を行う.

(3.10) の平衡点 $E^*$, (3.11) の平衡点 $E^*$ において (3.14) を整理すると (1.2) の特性方程式は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned}&(\lambda+\nu)[(\lambda+\varepsilon\beta_0 I^*+\mu)(\lambda+\alpha)(\lambda+\beta_0 I^*+\nu+\mu)\\&-(\lambda+\mu)\beta_0 e^{-\lambda\tau}\left\{\nu S^*+\varepsilon V^*(\lambda+\beta_0 I^*+\nu+\mu)+S^*(\lambda+\varepsilon\beta_0 I^*+\mu)\right\}]=0\end{aligned} \tag{3.26}$$

$\lambda+\nu=0$ より, $\lambda=-\nu<0$ が得られる. $\lambda$ が負であるため, 平衡点の安定性は

$$\begin{aligned}&(\lambda+\varepsilon\beta_0 I^*+\mu)(\lambda+\alpha)(\lambda+\beta_0 I^*+\nu+\mu)\\&-(\lambda+\mu)\beta_0 e^{-\lambda\tau}\left\{\nu S^*+\varepsilon V^*(\lambda+\beta_0 I^*+\nu+\mu)+S^*(\lambda+\varepsilon\beta_0 I^*+\mu)\right\}=0\end{aligned} \tag{3.27}$$

から得られる $\lambda$ の正負に依存する.

<u>$\tau=0$ のとき</u>

$\beta_0 S^*+\varepsilon\beta_0 V^*-\alpha=0$ を用いて, (3.27) の左辺を整理すると以下のようになる.

$$(\lambda+\mu+\nu+\beta_0 I^*)\left\{\lambda(\lambda+\varepsilon\beta_0 I^*+\mu)+\varepsilon\alpha\beta_0 I^*\right\}+(\lambda+\mu)(1-\varepsilon)\beta_0^2 S^* I^*=0 \tag{3.28}$$

ここで, ラウス・フルビッツ (Routh-Hurwitz) による定理を用いることで, (1.2) において (3.10), (3.11) の平衡点 $E^*$ は $\tau=0$ で漸近安定であることが分かる.

<u>$\tau>0$ のとき</u>

$\beta_0 S^*+\varepsilon\beta_0 V^*-\alpha=0$ を用いて, (3.27) の左辺を整理すると

$$(\lambda+\mu+\nu+\beta_0 I^*)\left\{(\lambda+\alpha)(\lambda+\varepsilon\beta_0 I^*+\mu)-(\lambda+\mu)e^{-\lambda\tau}\alpha\right\}+e^{-\lambda\tau}(\lambda+\mu)(1-\varepsilon)\beta_0^2 S^* I^*=0 \tag{3.29}$$

が得られる. ここで, (3.29) について

$$f_1(\lambda)=(\lambda+\mu+\nu+\beta_0 I^*)\left\{(\lambda+\alpha)(\lambda+\varepsilon\beta_0 I^*+\mu)-(\lambda+\mu)e^{-\lambda\tau}\alpha\right\}+e^{-\lambda\tau}(\lambda+\mu)(1-\varepsilon)\beta_0^2 S^* I^* \tag{3.30}$$

とおく. また,

$$\begin{aligned}P_1&=(\mu+\nu+\beta_0 I^*)+(\mu+\varepsilon\beta_0 I^*)+\alpha\\P_2&=\alpha(\mu+\varepsilon\beta_0 I^*)+(\mu+\nu+\beta_0 I^*)(\mu+\varepsilon\beta_0 I^*)+(\mu+\nu+\beta_0 I^*)\alpha\\P_3&=(\mu+\nu+\beta_0 I^*)\alpha(\mu+\varepsilon\beta_0 I^*)\\Q_1&=-\alpha\\Q_2&=-\mu\alpha-(\mu+\nu+\beta_0 I^*)\alpha+(1-\varepsilon)\beta_0^2 S^* I^*\\Q_3&=-(\mu+\nu+\beta_0 I^*)\mu\alpha+\mu(1-\varepsilon)\beta_0^2 S^* I^*\end{aligned}$$

とおくと (3.30) は

$$f_1(\lambda)=(\lambda^3+P_1\lambda^2+P_2\lambda+P_3)+(Q_1\lambda^2+Q_2\lambda+Q_3)e^{-\lambda\tau} \tag{3.31}$$

と書くことができる. (3.31) において $\lambda=i\omega$ とする. また, $e^{i\vartheta}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$ を利用し整理すると

$$\begin{aligned}&P_1^2\omega^4-2P_1P_3\omega^2+P_3^2-Q_2^2\omega^2\sin^2\omega\tau-2(Q_2Q_3\omega-Q_1Q_2\omega^3)\sin\omega\tau\cos\omega\tau\\&-(Q_3^2-2Q_1Q_3\omega^2+Q_1^2\omega^4)\cos^2\omega\tau+\omega^6-2P_2\omega^4+P_2^2\omega^2\\&-Q_2^2\omega^2\cos^2\omega\tau-2(Q_1Q_2\omega^3-Q_2Q_3\omega)\sin\omega\tau\cos\omega\tau-(Q_1^2\omega^4-2Q_1Q_3\omega^2+Q_3^2)\sin^2\omega\tau\\=&\ \omega^6+(-2P_2+P_1^2-Q_1^2)\omega^4+(P_2^2+2Q_1Q_3-Q_2^2-2P_1P_3)\omega^2+(-Q_3^2+P_3^2)\end{aligned}$$

が得られる. ここで

$$
\begin{aligned}
a_4 &= -2P_2 + P_1^2 - Q_1^2 \\
a_5 &= P_2^2 + 2Q_1Q_3 - Q_2^2 - 2P_1P_3 \\
a_6 &= -Q_3^2 + P_3^2
\end{aligned}
$$

とおき,

$$f(\omega) = \omega^6 + a_4\omega^4 + a_5\omega^2 + a_6 \tag{3.32}$$

とする. ここで,

$$a_4 = (\mu + \varepsilon\beta_0 I^*)^2 + (\mu + \nu + \beta_0 I^*)^2 > 0 \tag{3.33}$$

が成り立つ. また,

$$a_6 = -Q_3^2 + P_3^2 = (P_3 + Q_3)(P_3 - Q_3) \tag{3.34}$$

について (3.4), (3.5), $\beta_0 S^* + \varepsilon\beta_0 V^* - \alpha = 0$ を用いると

$$a_6 > 0 \tag{3.35}$$

が成り立つ. また, (3.32) において $\omega^2 = z$ とすると

$$f(z) = z^3 + a_4 z^2 + a_5 z + a_6 \tag{3.36}$$

が得られる. ここで

$$\frac{d}{dz}f(z) = 3z^2 + 2a_4 z + a_5 = 0 \tag{3.37}$$

の解について考える.

$$z = \frac{-a_4 \pm \sqrt{a_4^2 - 3a_5}}{3}$$

より, $a_5 > 0$ である場合, (3.36) は正の解をもたない. つまり, このとき (1.2) において (3.10), (3.11) の平衡点 $E^*$ は $\tau \geq 0$ でつねに漸近安定である. 以上から, 定理 2.3 の主張が得られた.

# 参考文献


[1]「厚生労働省」
https://www.mhlw.go.jp/bunya/kenkou/kekkaku-kansenshou19/Rotavirus/index.html
(参照日 2025 年 8 月 28 日)

[2] A.N. Chatterjee and F.A. Basir, "Modeling of the effects of media in the course of vaccination of rotavirus", Advances in Epidemiological Modeling and Control of Viruses, 169-189, (2023).

[3] 桑村雅隆,「パターン形成と分岐理論　自発的パターン発生の力学系入門」, 共立出版株式会社,(2021)